Teoria ergodyczna
WPPT Matematyka, IIIr. semestr zimowy 2008/9
Wykład 4

29/10/08

Przykład
Obrót niewymierny $z \mapsto ze^{2\pi i\alpha}$ ($\alpha \in IQ$) z miarą Lebesgue'a λ jest ergodyczny.

Dowód: Weźmy podzbiór niezmienniczy A okręgu. Funkcja charakterystyczna $f = \mathbf{1}_A$ jest niezmiennicza, ponadto należy do przestrzeni Hilberta $L^2(\lambda)$. Wiadomo, że na okręgu jednostkowym z miarą λ bazą dla $L^2(\lambda)$ jest ciąg funcji $\xi_n(z) = z^n$, ($n \in \mathbb{N}$). Zatem f rozkłada się jednoznacznie w szereg Fouriera

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Oznaczmy $z_0 = e^2\pi i\alpha$. Z niezmienniczości $f(z) = f(z_0 z)$, czyli

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z_0^n z^n.$$

Z jednoznaczności rozkładu, dla każdego n musi zachodzić $a_n = a_n z_0^n$. Ponieważ z_0 nie jest pierwiastkiem z 1, więc $z_0^n \neq 1$ (oprócz $n = 0$). Zatem dla $n \neq 0$ musi zachodzić $a_n = 0$. Stąd $f \equiv a_0$. Udowodniliśmy, że $\mathbf{1}_A$ jest funkcją stałą, zatem $\mu(A) = 0$ lub 1. $\square$

Izomorfizm układów
Definicja. Dwa układy $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu, S)$ są *izomorficzne (miarowo)* jeśli istnieje (określona μ-prawie wszędzie) bi-mierzalna injekcja $\varphi : X \to Y$ taka, że $\varphi\mu = \nu$ (czyli izomorfizm przestrzeni miarowych $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$), która *zachowuje działanie* (inaczej jest *ekwiwariantna*), tzn. spełnia warunek $\forall_{x\in X}\ \varphi(Tx) = S(\varphi x)$. Można to zapisać prościej jako $\varphi \circ T = S \circ \varphi$, lub powiedzieć, że poniższy *diagram komutuje*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\varphi \\ Y & \xrightarrow[S]{} & Y \end{array}$$

Jeśli w powyższej definicji dopuścimy odwzorowanie φ, które nie jest różnowartościowe (homomrfizm przestrzeni miarowych z $(X, \mathcal{F}, \mu)$ do $(Y, \mathcal{G}, \nu)$), to powiemy, że układ $(Y, \mathcal{G}, \nu, S)$ jest *faktorem* układu $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$.

Przykład Układ $(\mathbb{T}, \mathcal{B}, \lambda, z^2)$ (okrąg jednostkowy z miarą Lebesgue'a i podnoszeniem do kwadratu) jest izomorficzny z „shiftem" $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \Sigma, \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$.

Dowód: Pomijając liczby t wymierne określmy $\varphi(e^{2\pi it})$ = rozwnięcie binarne t (cyfry PO kropce dziesiętnej). Przy $t \in (0,1)$ φ zostało określone jednoznacznie

λ-prawie wszędzie na $\mathbb{T}$ o wartościach w $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Najpierw sprawdźmy ekwiwariantność. Mamy $(e^{2\pi it})^2 = e^{2\pi i(2t \bmod 1)}$ zatem $\varphi((e^{2\pi it})^2)$ = rozwinięcie ($2t$ mod 1). W rozwinięciu dwójkowym mnożenie przez 2 odpowiada przesunięciu wszystkich cyfr w lewo. Pierwsza niezerowa cyfra może teraz znaleźć się PRZED kropką dziesiętną. Ale operacja ,,mod 1" wyzeruje tą cyfrę. Zatem rozwinięcie($2t$ mod 1) jest równe σ(rozwinięcie t). Zatem $\varphi((e^{2\pi it})^2) = \sigma(\varphi(e^{2\pi it}))$. Pozostało sprawdzić, że $\varphi(\lambda) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}^{\mathbb{N}}$. Wystarczy sprawdzać cylindry $\{x : x_1 = b_1, \ldots, x_n = b_n\}$, $(b_1, \ldots, b_n \in \{0,1\})$. Miara produktowa takiego cylindra wynosi 2^{-n}. Przeciwobrazem przez φ jest łuk przy $t \in (t_0, t_0 + 2^{-n})$ (z wyrzuconymi t wymiernymi), gdzie t_0 jest wymierne i ma rozwinięcie skończone $b_1, \ldots, b_n$. Miara Lebesgue'a (unormowana) takiego łuku wynosi również 2^{-n}. $\square$

Definicja. Własność układów dynamicznych nazywamy *niezmiennikiem izomorfizmu*, jeśli dla dowolnego układu, który ją posiada, posiada ją również każdy układ z nim izomorficzny.

Twierdzenie. Ergodyczność jest niezmiennikiem izomorfizmu.

Dowód: Pokażemy więcej: dowolny faktor układu ergodycznego jest ergodyczny. Niech $\varphi : (X, \mathcal{F}, \mu, T) \to (Y, \mathcal{G}, \nu, S)$ będzie homomorfizmiem ekwiwariantnym. Załóżmy, że układ $(Y, \mathcal{G}, \nu))$ nie jest ergodyczny. Wtedy istnieje zbiór niezmienniczy $B \subset Y$ o mierze nietrywialnej. Rozważmy $A = \varphi^{-1}(B)$. Jest to zbiór o mierze nietrywialnej. Jest on niezmienniczy bowiem

$$Tx \in A \implies \varphi Tx \in B \implies S\varphi x \in B \implies \varphi x \in B \implies x \in A.$$

Zatem $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ nie jest układem ergodycznym. $\square$

Wniosek: $z \to z^2$ na okręgu jednostkowym z miarą Lebesgue'a jest układem ergodycznym. Uzasadnienie: Na liście zadań jest fakt, że $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ z miarą produktową $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}^{\mathbb{N}}$ i ,,shiftem" jest układem ergodycznym.

Następny temat: Twierdzenie Poincaré, drapacze chmur, odwzorowanie indukowane, Twierdzenie Rochlina.

Tomasz Downarowicz